1 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2 + \frac{1}{5^n}$, $n \geq 0$ et $v_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n}}$, $n \geq 1$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'entier n_0 à partir duquel $|u_n - 2| \leq 10^{-6}$.

3. A l'aide d'une calculatrice, déterminer l'entier n_1 à partir duquel on a $|v_n - 2| \leq 10^{-6}$.

2 On considère la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.

2. En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^{(-1)^n n}}{(-5)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

4 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{2n + (-1)^n}$, $n \geq 0$.

5 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)...\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

6 On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que

$x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.33$,

$x_3 = 0.333$, ... , $x_n = 0.\underbrace{333...3}_{\text{n chiffres}}$,

$y_1 = 0.35$, $y_2 = 0.3535$,

$y_3 = 0.353535$,..., $y_n = 0.\underbrace{3535...35}_{\text{n fois 35}}$,

et $z_1 = 0.35$, $z_2 = 0.3355$,

$z_3 = 0.333555$, ..., $z_n = 0.\underbrace{333...3}_{\text{n chiffres}}\underbrace{555...5}_{\text{n chiffres}}$.

1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 3 \times \left(10^{-1} + ... + 10^{-n}\right)$.

b. En déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.

7 1. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \ n \geq 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

8 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

a. Montrer que pour $n \geq 4$, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = n^{2n} - (2n)^n$, $n \geq 1$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

9 On considère les suites (u_n) et (S_n) définies par $u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn